PONENCIA DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Curso 2019 - 2020

Reunida el 28 de noviembre en Granada la Ponencia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, se ha elaborado una pequeña relación de ejercicios para trabajar el concepto de integral definida y su aplicación al cálculo de áreas, principal novedad que presenta el documento de Directrices y Orientaciones para las Pruebas de Acceso y Admisión a la Universidad en el presente curso académico.

Al ser un documento de trabajo, hay problemas que se adaptan al formato de los ejercicios de las pruebas, mientras que otros tratan exclusivamente el cálculo de áreas, motivo por el cual no se ha incluido la puntuación de cada apartado.

A continuación se incluye la relación de problemas sobre integrales definidas y cálculo de áreas preparada por la Ponencia, a la que sigue la enviada el curso pasado para facilitar la preparación de las novedades que se incorporaron entonces al documento de Directrices y Orientaciones.

Relación de Problemas
Curso 2019 - 2020

RELACIÓN DE EJERCICIOS (Curso 2019-2020)

EJERCICIO 1

Se considera la función $f(x) = -x^2 + 6x + c$.

1. Calcule el valor del parámetro c para que la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 4$ pase por el punto $(0, 11)$.
2. Calcule el área de la región acotada limitada por las gráficas de $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ y $g(x) = 5 - x$.

EJERCICIO 2

Se considera la función dada por $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 + x + 1 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$

1. Estudie la derivabilidad de la función f.
2. Calcule $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)dx$.

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ -2x^2 + 3x + 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

1. Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f.
2. Analice la monotonía y determine los extremos relativos de f.
3. Calcule el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje OX en el intervalo $[0,\ 2]$

EJERCICIO 4

Dadas las funciones $f(x) = -x^2 + 3x + 2$ y $g(x) = 2x^2 - 6x - 10$,

1. Calcule los puntos de corte de las gráficas de f y g.
2. Calcule el área de la región acotada delimitada por las dos gráficas.

EJERCICIO 5

Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + a & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{b}{x+1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

1. Determine a y b para que f sea continua y derivable en $\mathbb{R}$.
2. Para $a = 2$ y $b = 4$, represente gráficamente f.
3. Para $a = 2$ y $b = 4$, calcule el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

EJERCICIO 6

Se consideran las funciones f y g, definidas en $\mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad g(x) = 4 - x^2$$

1. Calcule los puntos de corte de las gráficas de f y g
2. Represente sobre un mismo sistema de coordenadas cartesianas las gráficas de f y g y calcule el área de la región del plano delimitada por las gráficas de ambas funciones.

EJERCICIO 7

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ x + b & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

1. Determine los valores de a y b para que la función sea continua en $\mathbb{R}$.
2. Para $a = -2$ y $b = 4$, calcule $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx$

EJERCICIO 8

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 2x^2 + 4 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2 + 3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

1. Estudie la continuidad y derivabilidad de f.
2. Calcule el máximo y el mínimo de f en el intervalo $[-1,\ 1]$.
3. Calcule el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,\ 2]$.

EJERCICIO 9

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-3}{x+1} & \text{si} \quad x < 0 \\ -x^2 + 4x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

1. Estudie la continuidad y derivabilidad de f.
2. Estudie la monotonía y calcule la abscisa de los extremos relativos.
3. Calcule el área de la región limitada por la gráfica de $g(x) = -x^2 + 4x$ y el eje OX.

EJERCICIO 10

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 - 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{3}{x-1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

1. Compruebe que f es continua en $x = 0$. ¿Es derivable en $x = 0$?
2. Calcule el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, las rectas $x = -1$, $x = 1/2$ y el eje OX.

EJERCICIO 11

Una empresa conoce que el gasto instantáneo de combustible que le genera una de sus máquinas viene dado por la expresión

$$f(x) = x \cdot (x-5) \cdot (x-7), \;\; x \in [0,\, 5]$$

donde x viene dado en horas.

1. Calcule para qué valor de x se tiene que f alcanza un valor máximo.
2. Calcule el gasto total de combustible consumido.

EJERCICIO 12

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 8x + 16$ y $g(x) = x - 2$, se pide:

1. Represente ambas funciones en los mismos ejes coordenados.
2. Determine los puntos de corte entre las gráficas de ambas funciones.
3. Calcule el área delimitada por las gráficas de ambas funciones.

EJERCICIO 13

De la función $C(q)$ que representa los costes de producción de una empresa, en miles de euros, en función de la cantidad fabricada q, en miles de kilogramos, se sabe que su derivada viene dada por $C'(q) = 60q^2 - 80q + 35$. Se pide:

1. Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $C(q)$ y esboce la gráfica de la función $C'(q)$ en el intervalo $(0,\, 1.5)$.
2. Obtenga los intervalos de concavidad y convexidad de la función de costes $C(q)$
3. ¿Cuál es el coste adicional que debe asumir la empresa si decide pasar de fabricar 1000 kg a fabricar 1500 kg?

EJERCICIO 14

La temperatura en el interior de un horno de cerámica viene dada por la función

$$f(t) = -t^2 + 4t + 5, \text{ con } \; t \in [0,\, 5]$$

donde t representa el tiempo en horas y $f(t)$ está expresada en cientos de $°C$

1. Estudie la monotonía de f y calcule la temperatura máxima alcanzada.
2. Represente gráficamente $f(t)$.
3. Calcule $\displaystyle\int_0^5 f(t)\, dt$

EJERCICIO 15

Dada la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$,

1. Estudie su monotonía y calcule sus extremos.
2. Represente gráficamente la función.
3. Obtenga su primitiva.
4. Calcule el área de la región acotada limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = 2$.

EJERCICIO 16

La función que mide la concentración plasmática de un fármaco en función del tiempo, medida en mg/l, viene dada por la expresión:

$$C(t) = \begin{cases} -t^2 + 4.5\,t & \text{si} \quad 0 \le t \le 4 \\ \dfrac{4}{t-2} & \text{si} \quad t > 4 \end{cases}$$

donde t es el tiempo transcurrido, en horas, después de administrar el fármaco.

1. Estudie la continuidad de la función $C(t)$.
2. ¿En qué momento se detecta la concentración máxima del fármaco en la sangre y cuál es dicha concentración?
3. Esboce la gráfica de $C(t)$.
4. Calcule el área bajo la curva de $C(t)$ entre las 0 horas y las 6 horas.

EJERCICIO 17

Se considera la función dada por $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 + x + 1 & \text{si} \quad x \ge -1 \end{cases}$

1. Estudie la monotonía de la función f.
2. Calcule el área de la figura limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

EJERCICIO 18

Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} -5x - 10 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -x^2 + 2x - 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

1. Esboce la gráfica de f.
2. Calcule el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = 2$.

EJERCICIO 19

Dadas la parábola $f(x) = 3x^2$ y la recta $g(x) = -3x + 6$, se pide:

1. Represente sobre un mismo sistema de coordenadas cartesianas la gráfica de cada función.
2. Calcule el área del recinto plano limitado por las gráficas de f y g.

EJERCICIO 20

Calcule el área limitada por las gráficas de la función $f(x) = x^3 - 3x$ y de la recta $y = x$.

Relación de Problemas

Curso 2018 - 2019

RELACIÓN DE EJERCICIOS (Curso 2018-2019)

EJERCICIO 1

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

1. [1 **Punto**] Calcule la inversa de $(A \cdot A^t)$
2. [0.75 **Puntos**] ¿Admite inversa la matriz $(A^t \cdot A)$?
3. [0.75 **Puntos**] Calcule, cuando sea posible,

$$A \cdot B, \quad B \cdot A, \quad A^t \cdot B, \quad B \cdot A^t$$

EJERCICIO 2

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & m^2 + m \end{pmatrix}$, con m un parámetro real. Se pide:

1. [0.75 **Puntos**] ¿Para qué valores del parámetro m existe la matriz inversa de A?
2. [1 **Punto**] Para $m = 0$, calcule la matriz inversa de A.
3. [0.75 **Puntos**] Para $m = 0$ en la matriz A, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A = 2C$, siendo $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 3

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

1. [1.25 **Puntos**] ¿Es invertible la matriz $B+2I_2$? Justifique la respuesta y, en caso afirmativo, calcule $(B + 2I_2)^{-1}$
2. [1.25 **Puntos**] Resuelva la ecuación matricial $A^2 + X \cdot B + 2X = 3B^t$

EJERCICIO 4

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & m \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1. [0.7 **Puntos**] Calcule su determinante y el valor o valores del parámetro m para los que existe la inversa de la matriz A.
2. [1 **Punto**] Para $m = -1$, calcule A^{-1}.
3. [0.8 **Puntos**] Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = A + I_3$.

EJERCICIO 5

Se considera la ecuación matricial $A \cdot X = A^t \cdot B$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

1. [0.5 **Puntos**] ¿Qué dimensiones debe tener la matriz X?
2. [2 **Puntos**] Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = A^t \cdot B$

EJERCICIO 6

Se consideran las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. [1.75 **Puntos**] Indique razonadamente cuáles de las siguientes matrices posee inversa, calculando dicha inversa cuando sea posible: A, B, $C \cdot C^t$.

2. [0.75 **Puntos**] Calcule, si existe, una matriz X que satisfaga la ecuación $A \cdot X = D$

EJERCICIO 7

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. [0.8 **Puntos**] Obtenga los valores de m y n para que A coincida con su traspuesta y no tenga inversa.

2. [1 **Punto**] Para $m = 0$ y $n = 3$, obtenga A^{-1}.

3. [0.7 **Puntos**] Para $m = 0$ y $n = 3$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + 2I_3 = A^2$.

EJERCICIO 8

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \\ m & 3 & 2 \end{pmatrix}$

1. [1 **Punto**] Determine el valor de m para los que la matriz A no tiene inversa.

2. [1.5 **Puntos**] Para $m = 0$, obtenga A^{-1}.

EJERCICIO 9

1. [1.8 **Puntos**] Represente el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices:

$$y \leq 2x \qquad x - y \leq 2 \qquad 3x + 2y \leq 24 \qquad 2x + 3y \geq 12$$

2. [0.7 **Puntos**] Halle los puntos de esta región donde la función $F(x, y) = x + 2y$ alcanza los valores máximo y mínimo, calculando dichos valores.

EJERCICIO 10

[2.5 **Puntos**] Una librería necesita al menos 14 cajas de rotuladores, 8 cajas de folios y 18 cajas de bolígrafos. Dos distribuidores pueden proporcionarle los materiales, pero solamente los venden en lotes completos. El distribuidor A envía en cada lote 2 cajas de rotuladores, 4 de folios y 1 de bolígrafos. El distribuidor B envía en cada lote 3 cajas de rotuladores, 1 de folios y 7 de bolígrafos. Los costes por lote que se compre a cada distribuidor son de 60 euros y 65 euros respectivamente.

¿Cuántos lotes habrá que comprar a cada distribuidor para que los costes sean mínimos?, ¿cuáles serían esos costes?

EJERCICIO 11

Consideremos el recinto definido por las siguientes desigualdades:

$$2y \leq -3x+3 \qquad y \geq x-6 \qquad 2x \leq 7y+37$$

1. [1.5 **Puntos**] Represente gráficamente el recinto anterior y calcule sus vértices.
2. [1 **Punto**] Calcule en qué punto se alcanza el mínimo de la función $H(x,y) = -3x+3y+2$ restringida al anterior recinto y cuál es dicho valor.

EJERCICIO 12

[2.5 **Puntos**] Una agencia de viajes quiere reservar una serie de camarotes para un crucero. Sus previsiones de venta son de al menos 8 camarotes individuales, 10 camarotes dobles y 8 triples. Actualmente hay dos navieras que le ofrecen sendas ofertas por paquetes. La naviera A le ofrece comprar paquetes formados por 3 camarotes individuales, 2 dobles y 2 triples a 7 800 euros el paquete. La naviera B ofrece paquetes a 8 000 euros, formados por 2 camarotes individuales, 3 dobles y 2 triples.
¿Cuántos paquetes habrá que comprar a cada naviera para que la agencia de viajes tenga un coste mínimo? ¿A cuánto asciende dicho coste?

EJERCICIO 13

[2.5 **Puntos**] Un agricultor quiere abonar su terreno con una mezcla de dos abonos A y B. El abono A aporta por cada kg de producto 3 unidades de Nitrógeno, 1 unidad de Potasio y 1 de Fósforo, mientras que el abono B aporta por cada kg de producto 1 unidad de Nitrógeno, 1 unidad de Potasio y 4 de Fósforo. El terreno a abonar necesita al menos 10 unidades de Nitrógeno, al menos 6 de Potasio y al menos 12 de Fósforo. Por otra parte, se sabe que el precio de cada producto es de 5 €$/kg$ para el abono A y 2 €$/kg$ para el abono B.
¿Cuántos kg de abono se han de mezclar para que, respetando las condiciones indicadas, el coste sea el mínimo posible?

EJERCICIO 14

[2.5 **Puntos**] Una empresa dedicada al comercio electrónico, pretende planificar su publicidad diaria en radio y televisión. Se estima que cada espacio publicitario en radio proporciona 2 000 nuevos clientes en la sección de electrónica y 4 000 en la sección de moda. Por otra parte, la estimación de nuevos clientes por cada espacio publicitario en TV es de 1 000 para la sección de electrónica y 10 000 para la sección de moda. La empresa desea conseguir diariamente al menos 8 000 nuevos clientes en electrónica y 32 000 en moda. Se sabe que cada espacio publicitario tiene un coste de 5 000 euros en radio y de 12 000 euros en TV y que la emisión en TV no puede superar el doble de la emisión en radio.
Determine el número de espacios publicitarios que se deben emitir diariamente para conseguir los objetivos indicados de nuevos clientes con un coste mínimo. ¿Cuál es dicho coste?

EJERCICIO 15

1. [1.8 **Puntos**] Represente gráficamente la región factible definida por las siguientes restricciones, calculando sus vértices:
$$2x - y \geq 4 \quad 2x+3y \geq 12 \quad y \geq 1 \quad y \leq 10$$
2. [0.7 **Puntos**] Calcule el mínimo de $F(x,y) = 3x+4y$ en la región anterior.

EJERCICIO 16

Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 11$.

1. [1 **Punto**] Calcule los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un extremo en el punto $(2,5)$.
2. [1 **Punto**] Para $a = \dfrac{3}{8}$ y $b = \dfrac{-9}{2}$, estudie sus extremos relativos.
3. [0.5 **Puntos**] Calcule $\displaystyle\int \left(x^2 + 3x + \frac{6}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx$

EJERCICIO 17

Se considera la función dada por $f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si} \quad x \leq -3 \\ -3a - x^2 & \text{si} \quad -3 < x \leq 2 \\ x^2 - 8x + 17 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

1. [1.5 **Puntos**] Determine el valor de a para que f sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a, ¿es f derivable en todo su dominio?
2. [0.5 **Puntos**] Para $a = -3$, esboce la gráfica de la función f.
3. [0.5 **Puntos**] Calcule $\displaystyle\int (x^2 - 8x + 17)\, dx$

EJERCICIO 18

Se considera la función $f(x) = \dfrac{-4x + 1}{2x - 5}$.

1. [1.2 **Puntos**] Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función f.
2. [0.8 **Puntos**] Calcule las asíntotas de la función f.
3. [0.5 **Puntos**] Calcule $\displaystyle\int \left(-2 - \frac{9}{2x - 5} \right) dx$

EJERCICIO 19

Dada la función $f(x) = 2(x + e^{2x})$, calcule:

1. [1 **Punto**] Los puntos de inflexión de la función f, en caso de que existan.
2. [1 **Punto**] La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.
3. [0.5 **Puntos**] Calcule la función $F(x)$ sabiendo que $F'(x) = f(x)$ y que su gráfica pasa por el punto $(0, 2)$.

EJERCICIO 20

De una cierta función f, sabemos que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

1. [0.75 **Puntos**] Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f y calcule las abscisas de los puntos extremos relativos.
2. [0.5 **Puntos**] Determine la curvatura de la función f y la abscisa de su punto de inflexión.
3. [0.5 **Puntos**] Sabiendo que la función f pasa por el punto $(0, 1)$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto.
4. [0.75 **Puntos**] Calcule la expresión de la función f, sabiendo que la gráfica de la función pasa por el punto $(0, 1)$.

EJERCICIO 21

La función de beneficios de una empresa, expresada en miles de euros, depende de la cantidad de producto fabricada, x, expresada en miles de kg, según la función $B(x)$. Si la función de beneficios marginales de la empresa (derivada de la función de beneficios) tiene la expresión $B'(x) = 140 - \dfrac{180}{x + 1} - 40x$, se pide:

1. [1 **Punto**] Determine la cantidad a producir por la empresa para maximizar los beneficios.
2. [1 **Punto**] Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función de beneficios de la empresa.
3. [0.5 **Puntos**] Obtenga la expresión de la función de beneficios $B(x)$, si se considera que, si no se produce nada, el beneficio es nulo, es decir, $B(0) = 0$.